21.03.16

Εφαρμογή 1.9.6 / σελ. 48: Για κάθε υποσύνολο $A$ ενός μ.χ. $(E,\rho)$ και για τυχόν $x\in E$ ισχύουν οι σχέσεις

i) $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \rho(x,A)=0$

ii) $\delta(\bar{A}) = \delta(A)$

Λύση

i)
$$\begin{aligned} x\in \bar{A} &\Leftrightarrow (\forall r>0)\ B(x,r)\cap A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow (\forall r>0)(\exists y)\ y\in B(x,r)\cap A \\ &\Leftrightarrow (\forall r>0)(\exists y)\ y\in B(x,r) \wedge y\in A \\ &\Leftrightarrow (\forall r>0)(\exists y\in A)\ \rho(x,y)<r \\ &\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \inf_{y\in A} \rho(x,y)=0 \\ &\Leftrightarrow \rho(x,A)=0 \end{aligned}$$

Τώρα θ' αποδείξουμε γιατί ισχύει η ισοδυναμία (*)

$(\Longrightarrow)$

$(\forall r>0)(\exists y\in A)\ \rho(x,y)<r$

Επιλέγω $r=\frac{1}{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}$

επιλογή άπειρων σημείων

$\nu=1$, $\exists y_1\in A$ : $\rho(x,y_1)<1$

$\nu=2$, $\exists y_2\in A$ : $\rho(x,y_2)<\frac{1}{2}$

⋮

κ.ο.κ. άρα υπάρχει μια ακολουθία σημείων

άρα, $(\forall \nu\in\mathbb{N})(\exists y_\nu\in A)\ \rho(x,y_\nu)<\frac{1}{\nu}$

Γνωρίζουμε ότι $\rho(x,A)=\inf_{y\in A}\rho(x,y) \leq \rho(x,y_\nu) < \frac{1}{\nu}$

αφού inf το μικρότερο του συνόλου

Επομένως : $0\leq \rho(x,A)\leq \frac{1}{\nu} \Rightarrow \rho(x,A)=0$

$(\Leftarrow)$

$$\rho(x,A)=0 \Rightarrow \inf_{y\in A} \rho(x,y)=0$$

$$\Rightarrow (\forall r>0)(\exists y\in A)\ \rho(x,y) < \overset{\inf}{\widehat{0}} + r$$

Από I: $(\forall \varepsilon>0)(\exists x\in A)\quad x < \underbrace{m}_{=\inf A} + \varepsilon$

$$\Rightarrow (\forall r>0)(\exists y\in A)\ \rho(x,y)<r$$

ii) Είναι: $\delta(A) = \sup_{(x,y)\in A\times A} \rho(x,y)$

$A\subseteq \bar{A} \Rightarrow \delta(A)\le\delta(\bar{A})$. Θ.δ.ο. $\delta(\bar{A})\le\delta(A)$.

Θεωρούμε $x,y\in\bar{A} \Leftrightarrow \begin{cases}(\forall r>0)\ B(x,r)\cap A\neq\emptyset\\ (\forall r>0)\ B(y,r)\cap A\neq\emptyset\end{cases}$

Για $r=\frac{1}{\nu}$: $\begin{cases} B\left(x,\frac{1}{\nu}\right)\cap A\neq\emptyset \\ B\left(y,\frac{1}{\nu}\right)\cap A\neq\emptyset\end{cases}$

άρα (όμοια με την διαδικασία που κάναμε στο (i)$(\Rightarrow)$ έχουμε:)

$$(*)\begin{cases}(\forall\nu\in\mathbb{N})(\exists x_\nu\in A)\ \rho(x,x_\nu)<\frac{1}{\nu}\\ (\forall\nu\in\mathbb{N})(\exists y_\nu\in A)\ \rho(y,y_\nu)<\frac{1}{\nu}\end{cases}$$

$\rho(x,y)\le\rho(x,x_\nu)+\rho(x_\nu,y_\nu)+\rho(y_\nu,y)$ (τριγωνική ανισότητα)

$$\overset{(*)}{<} \frac{1}{\nu} + \sup_{(x,y)\in A\times A}\rho(x,y) + \frac{1}{\nu}$$

$$= \frac{2}{\nu} + \delta(A)$$

παίρνω όρια

$\Rightarrow \rho(x,y)\le\delta(A) \Rightarrow \delta(A)$ α.φ.

$\Rightarrow \sup_{(x,y)\in\bar{A}\times\bar{A}}\rho(x,y)\le\delta(A)$ (αφού sup $\le$ οποιοδήποτε α.φ.)

$\Rightarrow \delta(\bar{A})\le\delta(A)$

**Άσκηση 27/σελ. 360:** Ν.δ.ο. για τυχόντα υποσύνολα $A, B$ ενός μ.χ. ισχύουν οι σχέσεις

$$(A-B)^{\circ} = A^{\circ} - \bar{B}$$
$$\overline{A-B} \subseteq \bar{A} - B^{\circ}$$

**Λύση**

$$(A-B)^{\circ} = (A \cap B^c)^{\circ} = A^{\circ} \cap (B^c)^{\circ} = A^{\circ} \cap (\bar{B})^c = A^{\circ} - \bar{B}$$

$$\overline{A-B} = \overline{A \cap B^c} \subseteq \bar{A} \cap \overline{(B^c)} = \bar{A} \cap (B^{\circ})^c = \bar{A} - B^{\circ}$$

**Άσκηση 33/σελ. 364:** Αν $A$ είναι τυχόν υποσύνολο ενός μετρικού χώρου, ν' αποδειχθεί ότι

$$A^{\circ} = A - \partial A$$

**Λύση**

$x \in A - \partial A \iff x \in A \wedge x \notin \partial A$
$\iff x \in A \wedge x \notin (\bar{A} - A^{\circ})$
$\iff x \in A \wedge \underline{(x \notin \bar{A} \vee x \in A^{\circ})}$

$x \notin A - B = A \cap B^c$
$\iff x \notin A \cap B^c$
$\iff x \in (A \cap B^c)^c = A^c \cup B$
$\iff x \in A^c \vee x \in B$
$\iff \underline{x \notin A \vee x \in B}$

$\iff \overbrace{(x \in A \wedge x \notin \bar{A})}^{\text{δεν μπορεί να ισχύει} \Rightarrow \text{το βλέπουμε ως το κενό σύνολο, } \varnothing} \vee (x \in A \wedge x \in A^{\circ})$
$\iff x \in A \wedge x \in A^{\circ}$
$\iff x \in A^{\circ}$ (αφού $A^{\circ} \subseteq A$)

Άσκηση 47/σελ.374: Έστω $(E,\rho)$ ένας μ.χ. και $A$ τυχόν υποσύνολο του $E$.
Ν.δ.ο. $\overline{A \cup extA} = E$.

Λύση

Προφανώς $\overline{A \cup extA} \subseteq E$. Θ.δ.ο. $\overline{A \cup extA} \supseteq E$.

$$\overline{A \cup extA} = \bar{A} \cup \overline{extA}$$
$$= \bar{A} \cup \overline{(A^c)^o} \quad (\text{δηλ. ο πυρήνας του συμπληρώματος} = \overline{extA})$$
$$\supseteq \bar{A} \cup (A^c)^o \quad (\text{αφού } \bar{B} \supseteq B)$$
$$= \bar{A} \cup (\bar{A})^c$$
$$= E$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

$(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ $\quad a_\nu = a(\nu)$, $\quad a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$(a_\nu)_{\nu \in N}$, $\quad a : N \to E$ μ.χ., $N \subseteq \mathbb{Z}$, $N$ κάτω φραγμένο και απέραντο

$\underset{\substack{\nu \in N \\ \text{μπορεί και να} \\ \text{παραληφθεί}}}{a_\nu \to \ell \in E}$ $\overset{\text{ορ.}}{\iff}$ $(\rho(a_\nu, \ell))_{\nu \in N}$ είναι μηδενική πραγματική ακολουθία

$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n)(\forall \nu > n) \underbrace{|\rho(a_\nu, \ell)|}_{\text{το απόλυτο δεν χρειάζεται}} < \varepsilon$

ή $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n)(\forall \nu \geq n)\ \rho(a_\nu, \ell) \leq c \cdot \varepsilon$ όπου $c \in \mathbb{R}$ (Άσκ. Ι)

Το $\ell$ ονομάζεται όριο της ακολουθίας.

ΠΡΟΤΑΣΗ Για κάθε ακολουθία σ' ένα μχ υπάρχει το πολύ ένα όριο.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι $\ell_1, \ell_2$ στο $E$ είναι όρια της $(a_\nu)_{\nu \in N}$.
Τότε για κάθε $\nu \in N$ έχουμε:

$$0 \leq \rho(\ell_1, \ell_2) \leq \underbrace{\rho(\ell_1, a_\nu) + \rho(a_\nu, \ell_2)}_{\text{άθροισμα μηδενικών ακολουθιών}} \xRightarrow{\text{φράσσεται από μηδενικές ακολουθίες}} \rho(\ell_1, \ell_2) = 0 \Rightarrow \ell_1 = \ell_2$$

Συνεπώς το όριο ακολουθίας ορίζεται μονοσήμαντα.
Θα συμβολίζουμε $\lim_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu$

**ΠΡΟΤΑΣΗ** Έστω $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στον μ.χ. $(E, \rho)$ και $\ell \in E$. Τότε $\lim_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu = \ell \iff \underbrace{(\forall U(\ell))\ a_\nu \in U(\ell) \text{ τελικά.}}_{(*)}$

« τελικά » : σημαίνει ότι $(\exists n)(\forall \nu > n)\ a_\nu \in U(\ell)$
δηλ. μετά τον $n$-όρο όλοι οι όροι στριμώχνονται στο $U(\ell)$
(ουσιαστικά η ακολουθία προσεγγίζει όσο θέλουμε το $\ell$)

Απόδειξη
$(\Longrightarrow)$
Έστω $\lim_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu = \ell$ και $U(\ell)$ τυχαία περιοχή του $\ell$.
Τότε: $(\exists \varepsilon > 0)\ B(\ell, \varepsilon) \subseteq U(\ell)$.
Επειδή $\lim_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu = \ell$, ισχύει: $(\exists n)(\forall \nu > n)\ \rho(a_\nu, \ell) < \varepsilon$
$\Rightarrow (\exists n)(\forall \nu > n)\ a_\nu \in B(\ell, \varepsilon)$
$\Rightarrow a_\nu \in U(\ell)$ τελικά

$(\Longleftarrow)$
Έστω ότι ισχύει το $(*)$. Θδο. $\lim_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu = \ell$
Έστω $\varepsilon > 0$, και $B(\ell, \varepsilon)$ περιοχή του $\ell$.
$(*) \Rightarrow a_\nu \in B(\ell, \varepsilon)$ τελικά
$\Rightarrow (\exists n)(\forall \nu > n)\ \rho(a_\nu, \ell) < \varepsilon$
$\Rightarrow \lim_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu = \ell$

Είχαμε δει ότι: αν έχουμε $(E_1, p_1), \dots, (E_k, p_k)$ μ.χ. μπορούμε να φτιάξουμε $E = E_1 \times \dots \times E_k$

$E \ni x = (x_1, \dots, x_k)$
$E \ni y = (y_1, \dots, y_k)$

με $p(x,y) = \sqrt{p_1^2(x_1,y_1) + \dots + p_k^2(x_k,y_k)}$

και ο $(E,p)$ λέγεται καρτεσιανός μ.χ.

Επίσης, είχαμε αποδείξει ότι: $\overline{A_1 \times \dots \times A_k} = \overline{A_1} \times \dots \times \overline{A_k}$
$(A_1 \times \dots \times A_k)^\circ = A_1^\circ \times \dots \times A_k^\circ$

και τέθηκε ερώτημα για το
$\partial(A \times B) = \dots$ : H/W (αν δεν μπορούμε να βρούμε κάτι με = προσπαθούμε για $\subseteq$ ή $\supseteq$)

Τώρα, (επιστρέφουμε στο ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2) υποθέτουμε ότι:
$(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ εν $E = \bigtimes_{i=1}^{k} E_i$, δηλ. $a_\nu$ θα είναι της μορφής

$a_\nu = (a_{1\nu}, a_{2\nu}, \dots, a_{k\nu})$ (στα δεικτάκια έχουμε ί ν, αφού είναι ακολουθίες που εξαρτώνται από το ν)

$p\text{-}\lim_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu = \ell = (\ell_1, \dots, \ell_k) \Leftrightarrow$ αφού $a_\nu$ ανήκει στο $E$, για να έχει όριο το $\ell$ πρέπει να έχει αυτή τη μορφή.

βάλαμε μπροστά p- για να δηλώσουμε τη μετρική

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1\text{-}\lim a_{1\nu} = \ell_1 \\ \vdots \\ p_k\text{-}\lim a_{k\nu} = \ell_k \end{cases} \quad (*)$$

δηλ. η 1η συντεταγμένη της $a_\nu$ στην 1η του $\ell$
κ.ο.κ.

Είχαμε επίσης πει: $\rho_i(x_i, y_i) \leq \rho(x,y) \leq \rho_1(x_1,y_1) + \ldots + \rho_k(x_k,y_k)$
$i=1,\ldots,k$

(Θα το χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη της τελευταίας σχέσης στην προηγούμενη σελίδα)

Θα ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq \rho_1(a_{1\nu}, \ell_1) \leq \rho(a_\nu, \ell) \to 0 \\ \vdots \\ 0 \leq \rho_k(a_{k\nu}, \ell_k) \leq \rho(a_\nu, \ell) \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \rho_1(a_{1\nu}, \ell_1) \to 0 \\ \vdots \\ \rho_k(a_{k\nu}, \ell_k) \to 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \rho_1 - \lim\limits_{\nu\in N} a_{1\nu} = \ell_1 \\ \vdots \\ \rho_k - \lim\limits_{\nu\in N} a_{k\nu} = \ell_k \end{array}\right.$$

<u>Αντίστροφα</u>, έστω ισχύει η (*).
Τότε για κάθε $\nu \in N$ ισχύει:

$$0 \leq \rho(a_\nu, \ell) \leq \underbrace{\rho_1(a_{1\nu}, \ell_1) + \ldots + \rho_k(a_{k\nu}, \ell_k)}_{\to 0}$$

$\to 0$ αφού είναι άθροισμα σταθερών μηδενικών ακολουθιών

Άρα, $\rho(a_\nu, \ell) \to 0 \Rightarrow \rho - \lim\limits_{\nu\in N} a_\nu = \ell$.

Ερώτημα: Τι γίνεται αν σ' ένα μ.χ. $E$ αλλάξω τη $\rho$;
$\Rightarrow$ Θα αλλάξει το όριο?

Ας το δούμε

$(E,\rho)$ $\rho - \lim a_\nu = \ell \in E$

Βιβλίο σελ. 77-78
Εφαρμογή 2.2.1

$(E,\rho)$ διακριτός μ.χ
$(a_\nu)_{\nu\in N}$ ακολουθία εν $E$ και $\rho - \lim a_\nu = \ell \in E$

Τότε: $(\forall \varepsilon>0)(\exists n)(\forall \nu>n)\ \rho(a_\nu,\ell)<\varepsilon$

Τότε: $(\exists \hat{n})(\forall \nu>\hat{n})\ \rho(a_\nu,\ell)<\frac{1}{2}$

Άρα, $(\exists \hat{n})(\forall \nu>\hat{n})\ \rho(a_\nu,\ell)=0$ δηλ. $(\exists \hat{n})(\forall \nu>\hat{n})\ a_\nu=\ell$

δηλ. $a_\nu=\ell$ τελικά

το χρησιμοποιούμε όταν κάτι συμβαίνει από έναν όρο και μετά

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:

Άρα οι μόνες συγκλίνουσες είναι οι «τελικά σταθερές»

$(\mathbb{R},|\,|)$ $a_\nu=\frac{1}{\nu},\ \nu\in\mathbb{N}$ $\quad |\,|-\lim_{\nu\in\mathbb{N}}\frac{1}{\nu}=0$

$(\mathbb{R},\rho)$ διακρ. Η $\frac{1}{\nu},\ \nu\in\mathbb{N}$ δεν συγκλίνει.

αφού δεν είναι τελικά σταθερή.

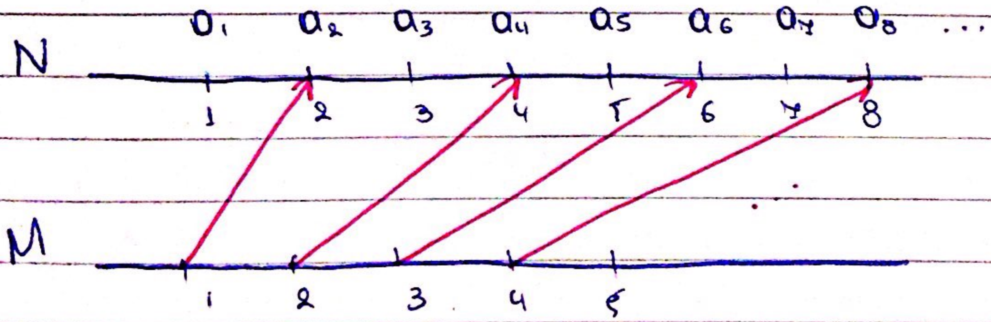
Άρα: Το όριο αλλάζει ανάλογα με την μετρική!

$(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$

ΟΡΙΣΜΟΣ $(\beta_\mu)_{\mu\in M}$ υπακολουθία της $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ αν υπάρχει $k: M\to N$ αύξουσα (γνήσια) και τέτοια ώστε: $\beta_\mu = a_{k(\mu)}$

$\left(\beta_\mu \overset{\text{ή}}{=} a_{k_\mu}\right)$

Παράδειγμα:




$k(\mu)=2\mu$ δηλ. εδώ $\beta_\mu=a_{2\mu}$

**ΠΡΟΤΑΣΗ** Έστω $(\beta_\gamma)_{\gamma \in M}$ υπακολουθία της $(a_\nu)_{\nu \in N}$ και $\lim_{\nu \in N} a_\nu = \ell$.
Τότε ισχύει $\lim_{\gamma \in M} \beta_\gamma = \ell$.

Απόδειξη
Η ακολουθία $\left(\rho(\beta_\gamma, \ell)\right)_{\gamma \in M}$ είναι υπακολουθία της $\left(\rho(a_\nu, \ell)\right)_{\nu \in N}$

(γνωστό από ΑΠΕΙ Ι)